BOUZAIEN Mokhles
FRION Anthony
HENIA Rami
WANG Steven

# Projet Radar

## Rapport

Version 1.0 - 12/04/2019
Formation d'ingénieur
Année scolaire 2018-2019

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

# Sommaire

# I. INTRODUCTION

## I.1 Contexte

Nous souhaitons mettre en place un radar qui puisse détecter une cible. Ainsi, nous allons placer ce dernier et envoyer une onde l'aide du radar. Une partie de l'onde va être réfléchie et elle permettra de nous dire s'il y a la présence d'une cible ou non.

## I.2 Présentation du problème

Le modèle n'est pas parfait, en effet les composants du radar forment du bruit avec une puissance plus ou moins faible qui le radar détectera la cible plus ou moins difficilement. Ainsi quatre cas se présentent à nous selon si la cible est présente ou non et si le radar détecte ou pas. On définit la probabilité de détection correcte d'une cible (notée PDC) et la probabilité de fausse alarme (notée PFA).

Ainsi PDC est la probabilité qu'une cible est détectée sachant qu'elle est bien présente. PFA est la probabilité qu'une cible est détectée sachant qu'elle n'est pas présente.

**Comment choisir la puissance du signal émis et le seuil de détection pour garantir une PFA et une PDC donnée ?**

## I.3 Modélisation du problème

En notant Y l'échantillon complexe qu'on reçoit, alors on a les hypothèses suivants :

*$H_0$ : Y = εX+W avec ε = 0 (une cible n'est pas présente)

*$H_1$ : Y = εX+W avec ε = 1 (une cible est présente)

où W constitue le bruit des composant

X le signal renvoyé par la cible

ε une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètres 1/2

Nous allons comparer cette valeur Y à un seuil T. Si Y est plus grand que T alors on a bien une cible et s'il est plus faible alors il n'y a pas de cible.

Dans notre cas, cette étude se fera grâce à des calculs théoriques basés sur un modèle du radar qui s'enchaîne avec la construction du radar. Or, l'étude théorique ne suffira pas à construire le radar puisque de nombreux paramètres peuvent fausser les valeurs, ainsi il est préférable, après construction, aussi de modifier légèrement le seuil pour une meilleure détection.

A l'aide de cette modélisation, nous pouvons exprimer PFA et PDC :

Ainsi PFA = $P(|Y| \geq T \mid \varepsilon = 0)$
et PDC = $P(|Y| \geq T \mid \varepsilon = 1)$

On remarque ainsi que :

- Si T = 0 :
On aura PFA = 1 et PDC = 1
- Si T = +∞ :
On aura PFA = 0 et PDC = 0

Sur le graphe PDC = f(PFA), on souhaite être dans la zone au dessus de PDC = PFA . En effet, cela signifie qu'on souhaite avoir plus de chance qu'il y ait bien une cible présente lorsqu'on en détecte une.

# II. ÉTUDE THÉORIQUE

## II.1 En supposant que la puissance du bruit est connue

### Calcul de PFA :

On a
$$PFA = P(|Y| \geq T | \varepsilon = 0)$$
$$PFA = P(\sqrt{W_r^2 + W_i^2} \geq T)$$

Comme $W_r$ et $W_i$ sont indépendants, on a :
$$PFA = 1 - \iint_{\sqrt{W_r^2+W_i^2} \leq T^2} f_{Wr}(W_r) f_{W\,i}(W_i)\, dW_r\, dW_i$$

Or $f_{Wr}(Wr) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Wr)^2}{\sigma^2}}$ et $f_{Wi}(Wi) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Wi)^2}{\sigma^2}}$

D'où $PFA = 1 - \iint_{\sqrt{W_r^2+W_i^2} \leq T^2} \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{(Wr)^2+(Wi)^2}{\sigma^2}} dW_r\, dW_i$

En posant le changement de variables : $W_r = R\cos(\theta)$ et $W_i = R\sin(\theta)$

On a
$$PFA = 1 - \iint_{\theta=0, R=0}^{\theta=2\pi, R=T} \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}} (dR)(R d\theta)$$
$$PFA = 1 - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^T R e^{-\frac{R^2}{\sigma^2}} dR$$
$$PFA = \frac{1}{\sigma^2} [-\sigma^2 e^{\frac{-R^2}{\sigma^2}}]_{R=0}^{R=T}$$

$$\boxed{\text{Donc } PFA = e^{-\left(\frac{T}{\sigma}\right)^2}}$$

### Calcul de PDC :

D'après 1.b) :
$$PDC = P(|Y| \geq T | \varepsilon = 1)$$
$$PDC = P(|W + X| \geq T)$$

Or $|W+X| \Leftrightarrow |W+X|^2 \geq T^2$
$$\Leftrightarrow \frac{|W+X|^2}{\sigma^2} \geq \frac{T^2}{\sigma^2}$$
$$\Leftrightarrow U \geq \frac{T^2}{\sigma^2}$$

Ainsi $PDC = 1 - P(U \geq \frac{T^2}{\sigma^2})$

Or $f_U(U)=\frac{1}{\rho+1}e^{-\frac{u}{\rho+1}}$

D'où

$$PDC=1-\int_0^{\frac{T^2}{\sigma^2}}\frac{1}{\rho+1}e^{-\frac{u}{\rho+1}}du$$

$$PDC=1-\frac{1}{\rho+1}\left[-(\rho+1)e^{-\frac{u}{\rho+1}}\right]_0^{T^2/\sigma^2}$$

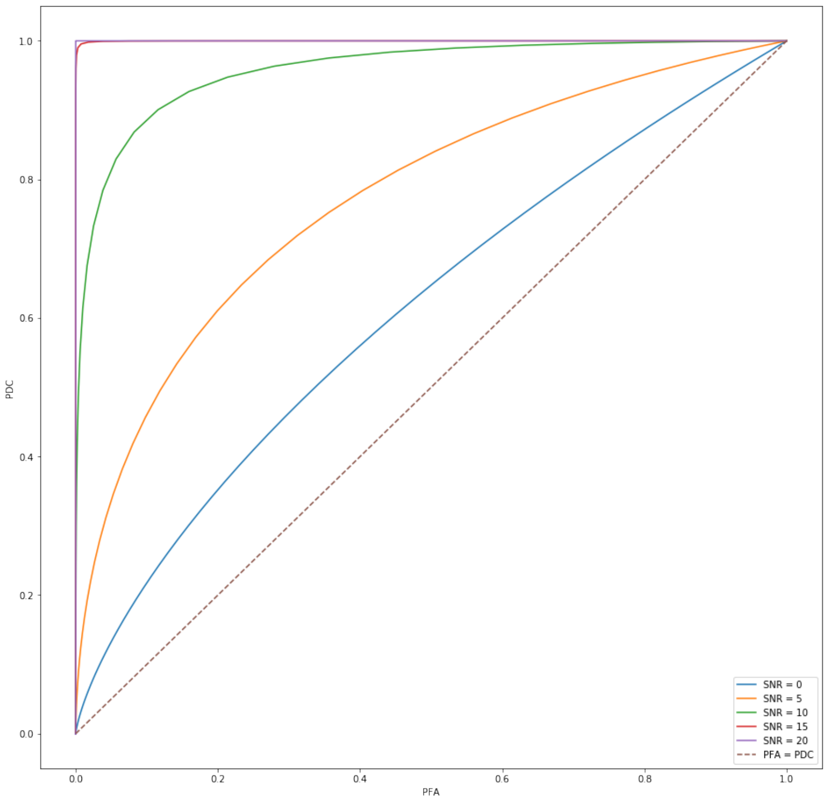
$$PDC=1+\left(e^{-\frac{T^2}{\sigma^2(\rho+1)}}-1\right)$$

$$\boxed{\text{Donc}\quad PDC=e^{-\frac{T^2}{\sigma^2(\rho+1)}}}$$

On remarque ainsi une relation entre PDC et PFA.

En effet, on a :

$$\boxed{PDC=PFA^{\frac{1}{\rho+1}}}$$




Pour une valeur de ρ proche de 0 la courbe obtenue sera proche de la courbe PDC = PFA. Pour une valeur de ρ élevée, en revanche, la PDC sera toujours beaucoup plus proche de 1 que la PFA, et on fonctionnera donc dans les domaines souhaités du graphique.

Ainsi, il est préférable que le paramètre ρ soit élevé.

## II.2 Dans le cas où la variance de bruit n'est pas connue

Dans un vrai système, la variance de bruit n'est pas connue, ainsi on ne peut que l'estimer avec une certaine incertitude. Et on souhaite voir quel impact une erreur dans l'estimation de la variance peut avoir sur notre système.

### Conséquence sur la PFA et la PDC:

Le tableau suivant récapitule les conséquences du rapport entre la valeur théorique $\hat{\sigma}$ et la valeur réelle $\sigma$ sur la PFA et la PDC en prévoyant PFA = $10^{-6}$ et PDC = 0,9.

| $\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ | 1 | 0,5 | 2 |
|---|---|---|---|
| PFA | $10^{-6}$ | $10^{-3}$ | $10^{-12}$ |
| PDC | 0,9 | 0,95 | 0,81 |
| Puissance | $A_0^2$ | $2A_0^2$ | $A_0^2/2$ |

On constate que la PFA et la PDC croissent toutes deux en fonction du rapport de la variance théorique sur la variance réelle. Si notre priorité est de minimiser la PFA, alors il est préférable de surévaluer la variance plutôt que de la sous-évaluer. Cependant, cela aura tendance à augmenter la PDC, et donc le risque de ne pas détecter un objet présent. Il faut donc trouver un compromis.

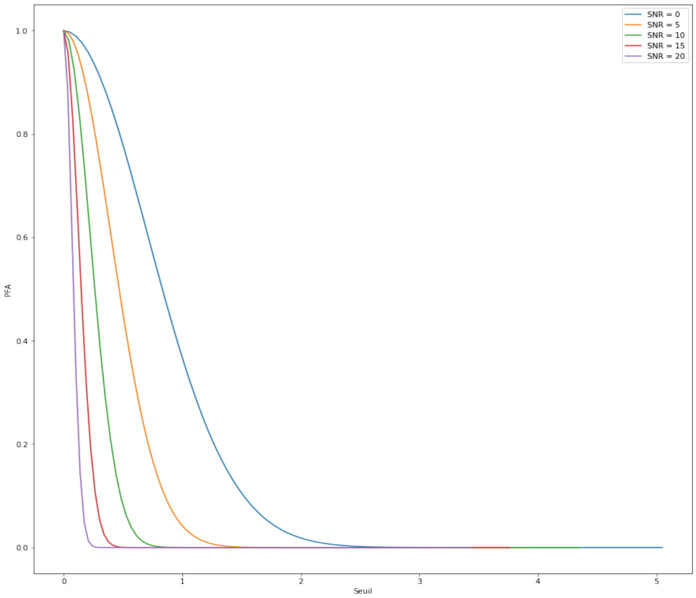
En outre, La puissance correspond à l'expression $A_0^2 = \sigma^2 \rho$
Ainsi, en adaptant la variance tout en maintenant la puissance constante, on modifie le paramètre ρ qui intervient dans l'expression de la PDC. En particulier, si on décide de surestimer la variance, alors le paramètre ρ diminue et la PDC devient donc proche de la PFA, ce qui n'est pas souhaité.
On a donc plutôt intérêt à augmenter la puissance lorsque l'on augmente la variance.

# III. ÉTUDE EMPIRIQUE

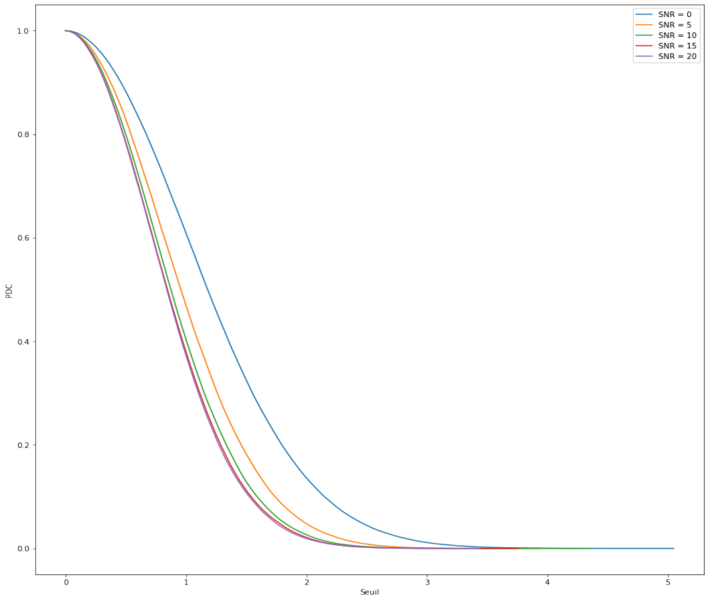
Tous d'abord, on va essayer de faire une estimation de la valeur du seuil afin de d'avoir une valeur faible de PFA (proche de 0) et une valeur de PDC proche de 1.

On trace alors les valeurs de PFA et PDC en fonction de différentes valeurs du seuil.

On obtient les deux figures suivantes :




*Allure de PFA en fonction de la valeur du Seuil*

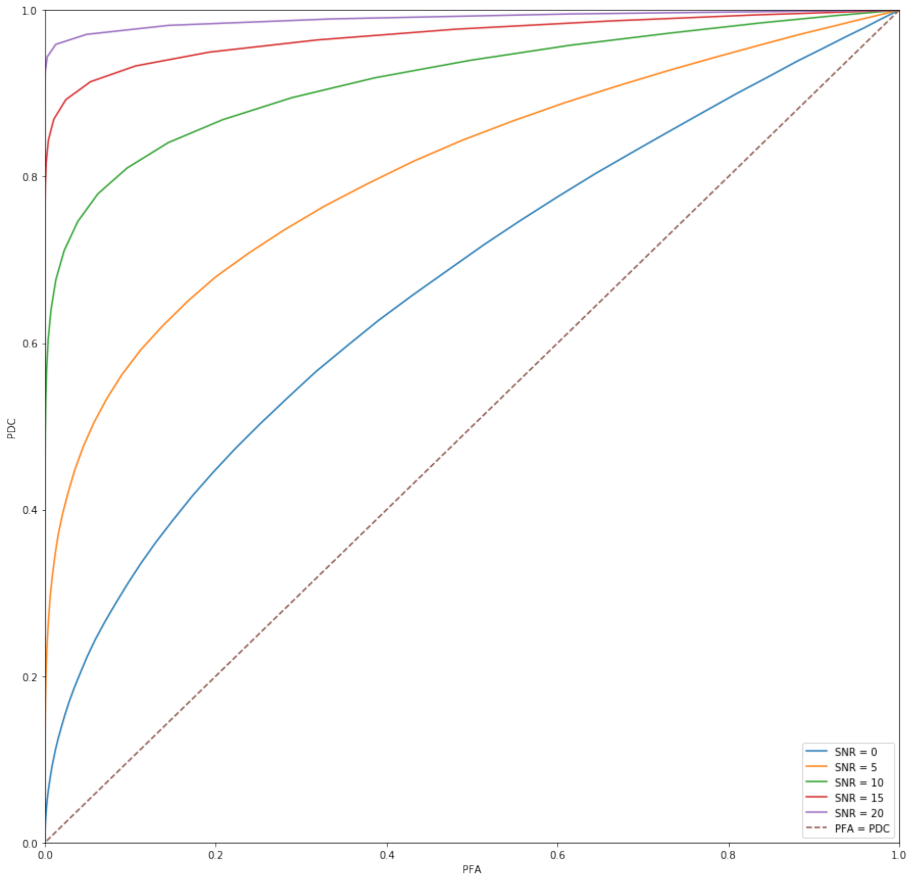



*Allure de PDC en fonction de la valeur du Seuil*

Pour une valeur du seuil comprise entre 0.5 et 1, on obtient des résultats satisfaisants quant aux valeur de la PFA et PDC.

On fait l'étude des résultat expérimentaux provenant du RADAR dans le but d'étudier les courbes ROC : PDC = f(PFA).

On obtient des courbes de cette allure avec différentes valeurs de ρ :




*Allure de courbes pour différentes valeurs de ρ*

On remarque que plus la valeur SNR est importante, plus le bruit est négligeable devant le signal donc il va moins perturber sa décision. Ainsi, on atteint une valeur de PDC proche de 1 lorsque PFA est faible (pour SNR=20dB).

# IV. CONCLUSION

Les études pratique et théorique faites nous permettent de choisir une puissance du signal émis ainsi que la valeur du seuil (pour des PFA et PDC données) afin d'améliorer l'efficacité du RADAR en présence du bruit généré par les composantes électroniques.