Introduction

Le but de ce TP est d'agir, en utilisant $MATLAB^©$, sur des signaux audionumériques en implémentant des filtres (systèmes linéaire invariants en temps) afin de traiter éventuellement les défauts du signal.

1. Prédétermination : étude théorique de l'effet de retard

Dans cette partie, on s'intéresse à l'effet de retard à travers plusieurs manipulations sur des filtre à réponse impulsionnelle infinie. En effet, suite à une boucle de rétroaction, la réponse impulsionnelles du filtre est infinie, d'où l'appellation.

Dans la suite, le système est décrit par l'équation suivante :

$$y(k) = x(k) - gy(k - \tau)$$

La réponse comporte bien une partie récursive non nul.

<u>Question 1.1.</u>

Cherchons la réponse impulsionnelle du filtre régit par l'équation (1), c'est-à-dire en considérant $h(k) = \delta_k$. En passant à la transformé en z de l'équation (1), on obtient : $Y(z) = 1 - g.z^{-\tau}.Y(z) \leftrightarrow Y(z)(1 + gz^{-\tau}) = 1 \leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1+gz^{-\tau}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-gz^{-\tau})^n$.

On obtient donc : $h(k) = y(k) = \sum_{n=0}^{\infty}(-g)^n\delta_{n\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}(-g)^{\frac{n}{\tau}}\delta_n = \begin{cases}(-g)^{\frac{k}{\tau}}, si\ \frac{k}{\tau}\ est\ un\ entier \\ 0, sinon\end{cases}$ (2)

Après chaque période du temps égale à τ, une copie du signal d'entrée est rajoutée à la réponse avec un facteur de g^n, où n est le numéro du cycle en cours.

<u>Question 1.2.</u>

Le filtre est stable si la fonction h est sommable, c'est-à-dire la somme $h(k) = \sum_{n=0}^{\infty}|(-g)^n\delta_{n\tau}|$ a une limite finie. Or $|(-g)^n\delta_{n\tau}| \leq |g|^n$. Donc par comparaison des séries numérique à terme positifs, h converge si $|g| < 1$.

C'est un résultat tout à fait logique, sinon le signal continue à être amplifiée indéfiniment ce qui n'a aucun sens physique.

<u>Manipulation 1.1.</u>

En utilisant $MATLAB^©$, on représente graphiquement la réponse impulsionnelle du filtre étudié avec les paramètres suivants :

$Fe = 44100Hz$: la fréquence d'échantillonnage

$\tau = 0.25s$: le retard

$g = 0.9$: le facteur d'atténuation

$k = \{0; 1; \dots; 10Fe\}$: les points d'échantillonnage

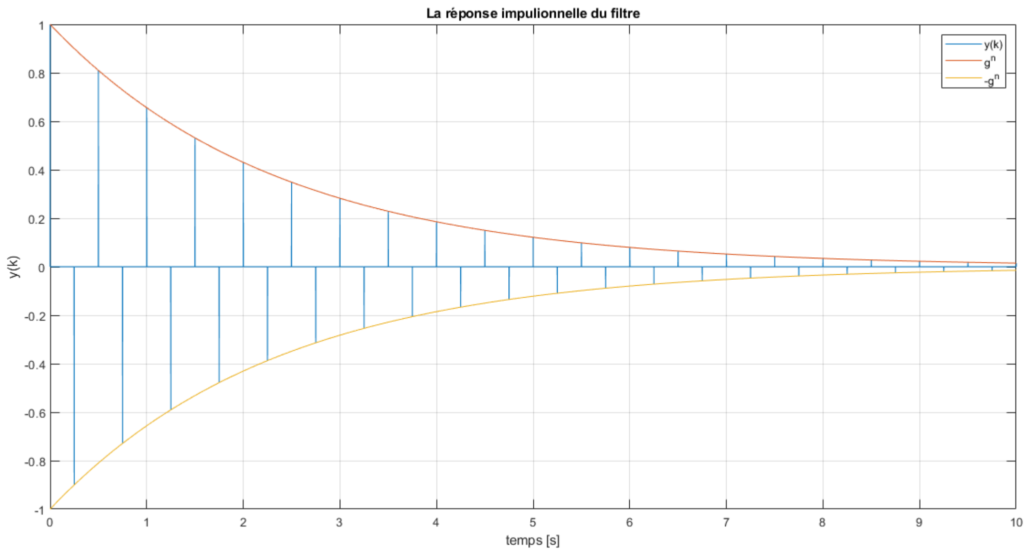


Figure 1 - La réponse impulsionnelle du filtre (bleu)

La représentation graphique est, sans aucune surprise, la même que la réponse impulsionnelle théorique. En effet, le support de la réponse est limité aux multiples de τ $(0; \tau; 2\tau; \dots)$. La fonction h alternes entre des valeurs positifs et négatifs selon la parité de $k = n\tau$ et prend dans les deux cas une valeur egale en valeur absolue à $g^{\frac{k}{\tau}}$ qui est la fonction représentée en rouge, d'où la validation de la valeur théorique de l'équation (2).

Question 1.3.

Le filtre étudié est régi par l'équation suivante :

$$y(k) = x(k) - gy(k - \tau)$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(k - i) - \sum_{j=0}^{N} a_j y(k - j)$$

Avec $M = 0$, $b_i = \begin{cases} 1, si\ i = 0 \\ 0, sinon \end{cases}$ et $N = \tau Fe$, $a_j = \begin{cases} g, & pour\ j = N \\ & 0, sinon \end{cases}$, car la partie récursive prend la valeur g pour la première fois après τFe itérations.

Ainsi, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$ et $b = [1]$.

Manipulation 1.2.

En utilisant la fonction $filtre(b, a, x)$ de $MATLAB^{©}$ avec les paramètres $x, a\ et\ b$ définis précédemment, on obtient la même réponse impulsionnelle.

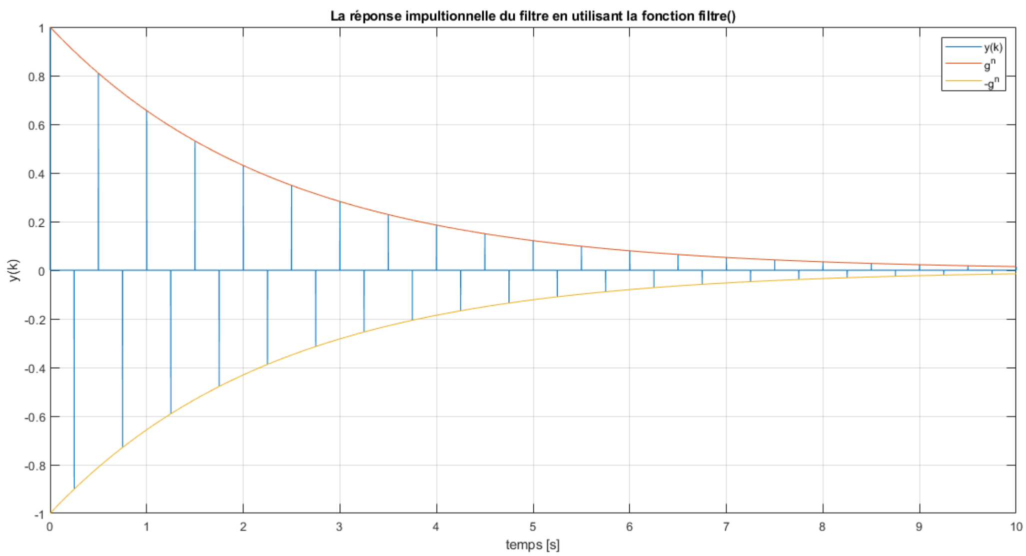


Figure 2 - La réponse impulsionnelle du filtre en utilisant la fonction $filtre(b, a, x)$

Donc on a la possibilité d'obtenir la réponse d'un filtre régi par une équation aux différences finies soit en implémentant l'équation et calculer la valeur en tout point, soit par la connaissance des coefficients de récurrence, et dans les deux cas c'est le même résultat obtenu.

Question 1.4.

La réponse impulsionnelle calculée dans la $Question$ 1.1 est $h(k) = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n \delta_{n\tau}$.

D'où : $\hat{h}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n e^{-2i\pi n\tau\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-ge^{-2i\pi\tau\nu}\right)^n = \frac{1}{1+ge^{-2i\pi\tau\nu}}$.

Module: $\left|\hat{h}(\nu)\right| = \frac{1}{|1+ge^{-2i\pi\tau\nu}|} = \frac{1}{|1+g(\cos(2\pi\tau\nu)-i sin(2\pi\tau\nu))|} = \frac{1}{|1+g\cos(2\pi\tau\nu)-igsin(2\pi\tau\nu)|} = \frac{1}{\sqrt{(1+g\cos(2\pi\tau\nu))^2+g^2\sin^2(2\pi\tau\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{1+2gcos(2\pi\tau\nu)+g^2}}$.

Argument : $\arg\left(\hat{h}(\nu)\right) = \arctan\left(\frac{gsin(2\pi\tau\nu)}{1+gcos(2\pi\tau\nu)}\right)$.

En faisant une étude mathématique du module de $\hat{h}$, on remarque qu'il s'agit d'une fonction périodique en ν qui admet des maximums pour des valeurs bien précises de la variable.

Pour maximiser le module de $\hat{h}$, il faut minimiser la fonction $cos(2\pi\tau\nu)$ qui admet un minimum égal à -1 pour $2\pi\tau\nu_k = (2k+1)\pi \leftrightarrow \nu_k = \frac{2k+1}{2\tau}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\hat{h}(\nu_k) = \frac{1}{1+ge^{-2i\pi\tau\nu_k}} = \frac{1}{1+ge^{-\frac{2i\pi\tau(2k+1)}{2\tau}}} = \frac{1}{1+ge^{-i\pi(2k+1)}} = \frac{1}{1-g}$, car $e^{-i\pi(2k+1)} = -1$.

Manipulation 1.3.

On fait la simulation avec 441000 points pour avoir une courbe encore plus lisse. On obtient la réponse fréquentielle suivante du filtre.

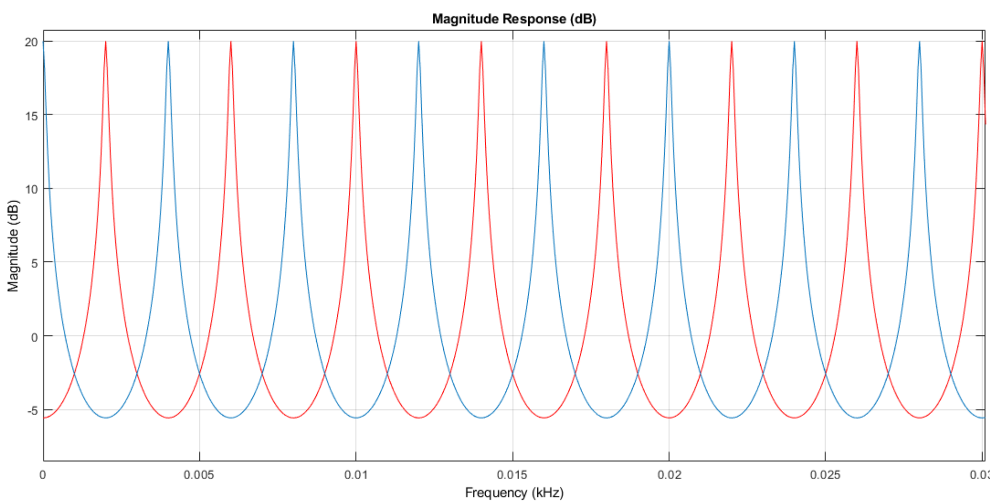


Figure 3 - La réponse fréquentielle du filtre pour deux valeurs opposées de g

On remarque bien une réponse fréquentielle périodique du filtre qui oscille entre deux valeurs extrémales : $M_{max} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-2g+g^2}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{1-g}\right) = 20\log(10) = 20dB$ et $M_{min} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+2g+g^2}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{1+g}\right) = 20\log\left(\frac{10}{19}\right) = -5.75dB$.

Le maximum de la fonction est atteint pour $\nu_k = 0.002; 0.006.. kHz$, ce sont les valeurs trouvées par le calcul.

Les maximums pur une valeur positive de g coincident avec les minimums pour une valeur négative de g, et vice versa.

2. TP MATLAB :

2.1. Application de l'effet de retard

Manipulation 2.1.

Le code de la fonction $effet\_delay$ est le suivant :

```
function x = effet_delay(x, tau, g, Fe)
s = size(x,1);
y = zeros(s,1);
for i = 1:1:s
   y(i,1) = x(i,1);
   if i-tau*Fe>0
        y(i,1) = y(i,1)-g*y(i-tau*Fe,1);
   end
end
x = y;
end
```

Si l'argument du vecteur y est négatif alors la valeur correspondante est nulle puisque le signal est causal donc le signal à l'itération suivante garde la même valeur que celle du signal de l'entrée, sinon la valeur est définie par l'équation (1) de récurrence.

Manipulation 2.2.

Dès l'exécution du test du signal généré, on remarque la présence du son de guitare à l'entrée du filtre et des sonorités après des temps de retard.

Les figures suivantes illustrent bien cet effet.

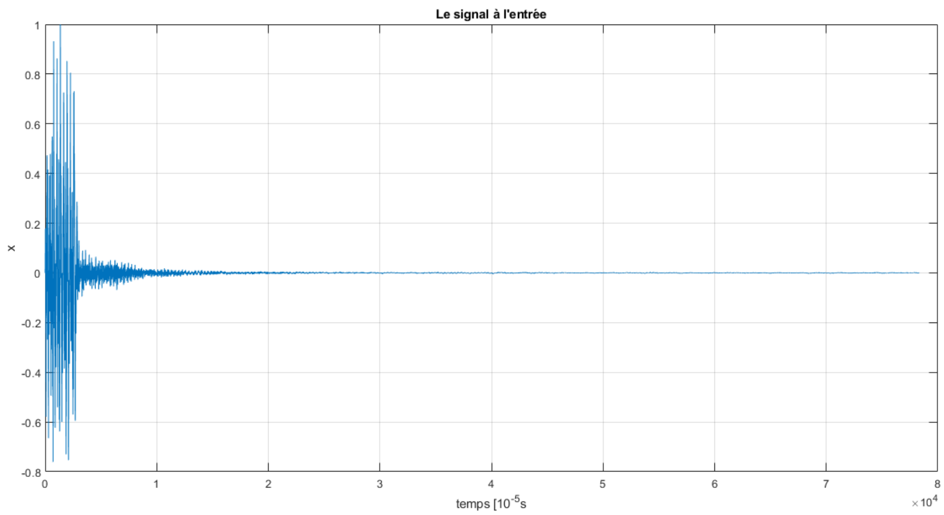


Figure 4 - Le signal à l'entrée du filtre

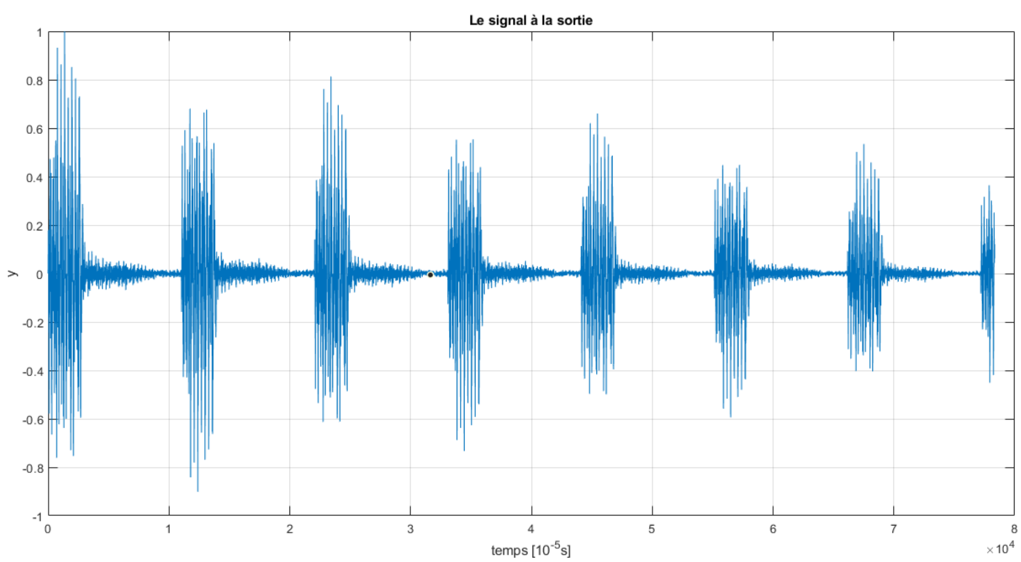


Figure 5 - Le signal à la sortie du filtre

L'effet de retard peut être remarque dans les deux simulations précédentes. En effet, après chaque période du temps égale à τ, le signal d'entrée se reproduit mais avec une atténuation qui dépend du coefficient g.

Manipulation 2.3.

Le code de la fonction $effet\_delay\_filtre$ est le suivant :

```
function x = effet_delay_filtre(x, tau, K, g, Fe)
s = size(x,1);
y = zeros(s,1);
for i = 1:1:s
   y(i,1) = x(i,1);
   n = 0;
   while n<K
       if i-tau*Fe-n>0
           y(i,1) = y(i,1)-(g/K)*y(i-tau*Fe-n,1);
       end
       n = n+1;
   end
end
x = y;
end
```

Si l'argument du vecteur y est négatif alors la valeur correspondante est nulle puisque le signal est causal donc le signal à l'itération suivante garde la même valeur que celle du signal de l'entrée, sinon la valeur est définie par l'équation (5) de récurrence.

$$y(k) = x(k) - \frac{g}{K}\sum_{n=0}^{K-1} y(k-\tau-n)$$

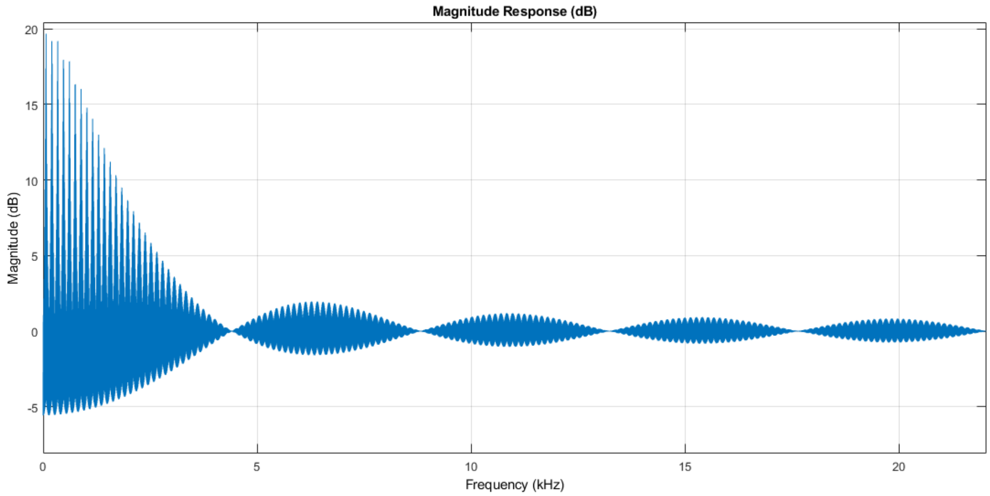
Question 2.1.

On doit tout d'abord calculer les coefficients a_i et b_i de l'équation aux différences finies du filtre :

$$y(k) = x(k) - \frac{g}{K}\sum_{n=0}^{K-1} y(k-\tau-n) = x(k) - \frac{g}{K}\sum_{n=1}^{K} y(k-\tau-n+1)$$

On a immédiatement, $b = [1]$ et $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{g}{10} \\ \vdots \\ \frac{g}{10} \end{bmatrix}$, le nombre des valeurs $\frac{g}{10}$ dans le vecteur a est égal à K.

En appliquant la fonction $fvtool()$ avec les vecteurs a et b, on obtient la caractéristique suivante du filtre :



La réponse fréquentielle n'est plus périodique avec un maximum constant. Les hautes fréquences sont progressivement atténuées puisque la magnitude du filtre diminue progressivement.

Conclusion

En utilisant un filtrage numérique, on a pu récupérer un signal qui s'est mélangé avec plusieurs de ses copies retardées tout en gardant un aspect plus ou moins « naturel » du signal audionumérique original.